Лекция 8
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АССОЦИИРОВАННОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа.

Введем характеристику

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\left|f(re^{i\varphi})\right|}{r}, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Функция $h(\varphi)$ называется ***индикатрисой роста*** функции $f(z)$. Индикатриса роста характеризует рост функции вдоль лучей.

Напомним, что в общем случае, при порядке ρ, $0 < \rho < +\infty$, тип функции

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{r^{\rho}},$$

а при $\rho = 1$ —

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{r},$$

где $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

Замечание. Из определения следует, что $h(\varphi) \le \sigma$.

Теорема 8.1. Пусть $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа с индикатрисой роста $h(\varphi)$, а $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $f(z)$. Тогда в полуплоскости $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0}) > h(\varphi_0)$ функция $\gamma(t)$ — аналитическая функция и имеет место представление

$$\gamma(t) = \int_0^{\infty\cdot e^{i\varphi_0}} f(z)e^{-zt}dz. \tag{8.1}$$

Доказательство. В силу определения индикатрисы роста $h(\varphi)$ справедлива оценка на луче $\arg z = \varphi_0$:

$$|f(z)| < A(\varepsilon)^{[h(\varphi_0)+\varepsilon]r}, \quad z = re^{i\varphi_0}, \ \varepsilon > 0.$$

Поэтому интеграл (8.1) сходится в полуплоскости $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0}) > h(\varphi_0) + \varepsilon + \delta$, $\delta > 0$ и представляет аналитическую функцию в полуплоскости $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0}) > h(\varphi_0)$ (свойство интеграла Лапласа).

Покажем, что интеграл в этой полуплоскости равен $\gamma(t)$. Представим функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n z^n}{n!} + R_m(z).$$

Имеем оценку на $R_m(z)$:

$$\left|R_m(z)\right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n!}|z|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n!}|z|^n < B(\varepsilon)e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}, \quad \varepsilon > 0.$$

Мы воспользовались тем, что $\sigma = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Тогда интеграл распишем следующим образом:

$$\int_0^{\infty\cdot e^{i\varphi_0}} f(z)e^{-zt}dz =$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n}{n!} \int_0^{\infty\cdot e^{i\varphi_0}} z^n e^{-zt}dz + \int_0^{R\cdot e^{i\varphi_0}} R_m(z)e^{-zt}dz + \int_{R\cdot e^{i\varphi_0}}^{\infty\cdot e^{i\varphi_0}} R_m(z)e^{-zt}dz.$$

Проведем оценку каждого из слагаемых. Пусть t лежит в полуплоскости $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0}) > \sigma + \varepsilon + \delta$, $\delta > 0$. Имеем

$$\left|R_m(z)e^{-zt}\right| \leq B(\varepsilon)e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}e^{-|z|\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0})} < B(\varepsilon)e^{(\sigma+\varepsilon)|z|-(\sigma+\varepsilon+\delta)|z|} < B(\varepsilon)e^{-\delta r},$$

$$|z| = r,$$

поэтому

$$\left|\int_{R\cdot e^{i\varphi_0}}^{\infty\cdot e^{i\varphi_0}} R_m(z)e^{-zt}dz\right| < B(\varepsilon)\int_R^{\infty} e^{-\delta r}dr.$$

Для любого $\varepsilon_1 > 0$ $\exists R_0(\varepsilon_1)$ такое, что при $R \geq R_0$ интеграл

$$\left|\int_{R\cdot e^{i\varphi_0}}^{\infty\cdot e^{i\varphi_0}} R_m(z)e^{-zt}dz\right| < \varepsilon_1.$$

Фиксируем R_0, оно не зависит от m. В полуплоскости $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0}) > \sigma + \varepsilon + \delta$ справедливы оценки:

$$\left|e^{-zt}\right| \leq 1, \quad \left|\int_0^{R\cdot e^{i\varphi_0}} R_m(z)e^{-zt}dt\right| \leq \int_0^R \left|R_m(z)\right|dr.$$

На отрезке $[0, R\cdot e^{i\varphi_0}]$ остаток $R_m(z)$ равномерно стремится к нулю при $m \to \infty$, т.е. для любого $\varepsilon_1 > 0$ $\exists m_0(\varepsilon_1)$, что при $m \geq m_0$ имеем $\int_0^R \left|R_m(z)\right|dr < \varepsilon_1$.

С другой стороны,

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{a_n}{n!}\int\limits_0^{\infty\cdot e^{i\varphi_0}} z^n e^{-zt}dz=\sum_{n=0}^{m}\frac{a_n}{n!}\cdot\frac{n!}{t^{n+1}},$$

так как $\int\limits_0^{\infty\cdot e^{i\varphi_0}} z^n e^{-zt}dz=\frac{n!}{t^{n+1}},\quad \mathrm{Re}(te^{i\varphi_0})>0.$

Таким образом, частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{t^{n+1}}$ равномерно сходятся в полуплоскости $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0})>\sigma+\varepsilon+\delta$ к интегралу $\int\limits_0^{\infty\cdot e^{i\varphi_0}} f(z)e^{-zt}dz$, в то же время функция $\gamma(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{t^{n+1}}$.

Так как $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ произвольные, то равенство

$$\gamma(t)=\int\limits_0^{\infty\cdot e^{i\varphi_0}} f(z)e^{-zt}dz$$

справедливо в полуплоскости $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0})>\sigma$.

Ранее мы доказали, что интеграл $\int\limits_0^{\infty\cdot e^{i\varphi_0}} f(z)e^{-zt}dz$ представляет аналитическую функцию в большей полуплоскости — $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0})>h(\varphi_0)$. Отсюда следует, что ассоциированная по Борелю с $f(z)$ функция $\gamma(t)$ также аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0})>h(\varphi_0)$ и в этой полуплоскости имеет место интегральное представление. Теорема доказана. ■

Следствие. Справедливо неравенство

$$K(-\varphi)\le h(\varphi),$$

$K(\varphi)$ — опорная функция к сопряженной диаграмме $\bar{D}$; $h(\varphi)$ — индикатриса роста $f(z)$.

Из определения опорной функции следует, что полуплоскость $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0})>K(-\varphi_0)$ ограничена опорной прямой к сопряженной диаграмме $\bar{D}$. Эта опорная прямая перпендикулярна лучу $\arg t=-\varphi_0$. Так как на опорной прямой у функции $\gamma(t)$ имеются особенности, то полуплоскость $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0})>K(-\varphi_0)$ содержит полуплоскость

$\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0}) > h(\varphi_0)$, в которой функция $\gamma(t)$ аналитична. Следовательно, $h(\varphi_0) \geq K(-\varphi_0)$.

А теперь докажем теорему.

Теорема Полиа. Пусть $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа, $\bar{D}$ — сопряженная диаграмма, $h(\varphi)$ — индикатриса роста, $K(\varphi)$ — опорная функция к $\bar{D}$. Тогда

$$h(\varphi) = K(-\varphi).$$

Доказательство. Из следствия к теореме 8.1 имеем, что $h(\varphi) \geq K(-\varphi)$, но из следствия к теореме 7.2 вытекает, что $h(\varphi) \leq K(-\varphi)$. Тем самым $h(\varphi) = K(-\varphi)$. ■

Из теоремы Полиа и из свойств опорной функции $K(\varphi)$ вытекает следующая теорема.

Теорема 8.2. Индикатриса роста $h(\varphi)$ функции $f(z)$ обладает следующими свойствами:

1) $h(\varphi)$ непрерывна, $\varphi \in [0, 2\pi]$;

2) $\max\limits_{\varphi \in [0,2\pi]} h(\varphi) = \sigma$;

3) $h(\varphi) \geq -\sigma, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$.

На основе доказанных выше теорем суммируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 8.3. Пусть $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа, $\bar{D}$ — сопряженная диаграмма, $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $f(z)$, $h(\varphi)$ — индикатриса роста, $K(\varphi)$ — опорная функция к $\bar{D}$. Тогда справедливо следующее:

1) для любого контура C, охватывающего $\bar{D}$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \gamma(t) e^{zt}\, dt;$$

2) $|f(re^{i\varphi})| \leq A(\varepsilon) e^{[K(-\varphi)+\varepsilon]r}, \quad \varepsilon > 0$;

3) $\gamma(t) = \int\limits_0^{\infty \cdot e^{i\varphi_0}} f(z) e^{-zt}\, dz, \quad \mathrm{Re}(te^{i\varphi_0}) > K(-\varphi_0)$.

Заметим, что полуплоскость $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0}) > K(-\varphi_0)$ при изменении параметра φ_0 заметет всю область $\mathbb{C} \setminus \bar{D}$.

Задачи

I. Найти индикатрисы роста следующих функций:

1) $f(z) = e^z$;
2) $f(z) = \sin z$;
3) $f(z) = \cos z$;
4) $f(z) = \operatorname{sh} z$;
5) $f(z) = \operatorname{ch} z$;
6) $f(z) = e^{z^n}$;
7) $f(z) = e^z + z^2$.

II. Доказать, что бесконечное произведение

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right], \quad 0 < \lambda_n < \infty, \ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n} = \sigma < \infty,$$

имеет индикатрису роста $h(\varphi) = \pi\sigma|\sin\varphi|$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

III. Найти индикатрису роста $h(\varphi)$ для квазиполинома.

IV. Пусть целая функция $f(z) \in [1, +\infty)$ и имеет индикатрису роста $h(\varphi)$. Определить индикатрису роста функции $F(z) = f(z) + P(z)$, где $P(z)$ — многочлен.